

NOMBRES ET OPÉRATIONS :  
**PREMIERS APPRENTISSAGES**

Lycée Buffon, Paris XV  
12-13 novembre 2015

# Améliorer la compréhension de la notion de nombre

**Henri Lehalle**

Professeur émérite de psychologie du développement de l'enfant et de  
l'adolescent

Université Paul Valéry – Montpellier & Laboratoire CHArt – EPHE et Paris 8

# Question 1 : *Peut-on améliorer la compréhension de la notion de nombre ?*

- « Améliorer ? » : améliorer ne veut pas dire accélérer à tout prix un développement qui doit prendre son temps.
- « La notion de nombre ? » : la notion de nombre n'est pas une notion aussi évidente qu'on pourrait le croire.
- Comparons deux formulations : « *Genèse du nombre* » vs « *Développement numérique* »
  - Si on parle de « *genèse du nombre* » (comme chez Piaget), la notion de nombre n'est attestée qu'à partir d'un certain niveau de développement ;
  - Si on parle de « *développement numérique* », des formes de connaissance numérique sont attestées à tous les niveaux de développement ; mais dans ce cas, on est obligé d'accepter comme « *numériques* » les comparaisons quantitatives approximatives et perceptives déjà effectives chez les bébés.

Ainsi les deux formulations ne correspondent pas à la même « compréhension de la notion de nombre ». Mais elles imposent toutes les deux de réfléchir aux critères définissant la notion de nombre.

# Critères de « *compréhension* »

- En définitive, l'attribution aux enfants d'une connaissance numérique dépend à la fois
  - des critères utilisés pour définir la notion de nombre,
  - et des critères pour l'évaluation psychologique qui permet de décider du niveau de connaissance des enfants.
- En particulier, si nous attribuons aux enfants des compétences numériques selon des *critères statistiques* (i.e. avec un taux de réussite simplement supérieur au hasard) cela ne peut pas suffire à caractériser l'*achèvement* d'un développement.
- En effet, en excluant ici les bogues fonctionnels toujours possibles, une compétence mathématique/numérique achevée est forcément générale : *à tous les coups on gagne !*

Ce qui se construit en mathématique ce sont des certitudes *logiques* donc *nécessaires* (N.B. ces certitudes sont cependant relatives aux données : ce ne sont pas des certitudes *absolues*).

# Critères de « *compréhension* »

- De ce qui précède, il résulte que la compréhension du nombre a deux facettes :
  - Il peut s'agir de la compréhension du nombre *par les enfants...*
  - Il peut s'agir aussi de *notre propre compréhension du nombre...* et cette compréhension est elle-même améliorée par la connaissance des étapes de la compréhension du nombre chez les enfants : c'est le principe même de *l'épistémologie génétique* selon Piaget.
- Notre thèse est que les étapes de la construction du nombre chez les enfants sont en relation avec les étapes du développement cognitif (Bideaud, Lehalle, & Vilette, 2004 ; Lehalle 2002 ; Lehalle, 2014 ; Lehalle, Delrieu, Joay-Arrouquet, & Vilette, 2014).
- Il y a alors **deux échelles d'analyse et une série de contraintes** :

# Repérer des étapes en *macrogenèse* (à long terme et pour tous les problèmes)

- *Le nombre chez les bébés :*
  - Les bébés réagissent à des différences de numérosité (sur un mode approximatif et perceptif)
  - Ils repèrent et mémorisent les objets un à un (on observe donc des réactions de surprise quand des objets disparaissent...)
- *Le nombre sémiotique (à partir de 2-3 ans)*
  - Représentation de quantités par des signes (pas seulement le langage)
  - Inférences sémiotiques par associations simples
- *Le nombre opératoire (à partir de 6-7 ans)*
  - Inférences logiques fondées sur l'itération
  - La notion de nombre intègre à ce niveau les aspects de **sérialisation** (ordination) et de **classification** (cardinalité)
- *Le nombre réfléchi (à partir de 10-12 ans)*
  - Formulation de lois numériques générales de plus en plus complexes (par exemple : « *la périodicité des multiples de n est n* »)

# Repérer des étapes en *microgenèse* (à court terme et pour un type de problème)

- Dans toute résolution d'un problème, on peut distinguer :
  - le traitement *explicitement* effectué par la personne ;
  - et les connaissances *implicites* qui s'activent en arrière-plan.
- L'analyse des traitements explicites permet de distinguer trois modalités de résolution (Lehalle, Delrieu, Joay-Arrouquet, & Vilette, 2014) :
  - Dans le cas de la **modalité sémantique**, chaque contexte est traité en lui-même, par une activation des connaissances liées à ce contexte ;
  - La **modalité analogique** consiste à utiliser un contexte pour en traiter un autre ;
  - La **modalité symbolique** est celle des experts dans le domaine considéré ;  
Dans ce cas, tout problème analogue active une représentation **symbolique** dégagée du contexte et chaque contexte devient un exemple d'un mode de résolution général.

# Contraintes liées aux variabilités individuelles

- Les variabilités *interindividuelles*

Elles se manifestent par exemple dans les rythmes de développement qui sont plus ou moins rapides.

- Les variabilités *intraindividuelles*

Elles sont une nécessité développementale car on n'acquiert pas une compétence d'un seul coup pour tous les contextes ; de fait, les acquisitions se font d'abord en modalité sémantique.

Les solutions trouvées peuvent donc varier:

pour un même type de problème,

chez un même enfant,

à un moment donné de son développement.

# Conclusion pour la question 1

- La connaissance de ces étapes et contraintes est une condition de « *l'amélioration de la compréhension de la notion de nombre* ».
- Il est essentiel de repérer chez les élèves les indices de leur mode de fonctionnement et donc de leur niveau de connaissance en macro- et en micro-genèse.



## Question 2 : *Peut-on et comment améliorer la compréhension de la notion de nombre (entier) par les enfants d'école maternelle ?*

- La période de développement qui va de 2-3 ans à 6-7 ans est cruciale pour les acquisitions numériques.
  - En effet, si le niveau opératoire est attesté vers 7 ans, il n'apparaît pas comme par miracle sans relation avec ce qui précède.
  - C'est donc la **construction opératoire** qui est en jeu à la période de l'école maternelle.
- À cette période, les fonctionnements sont au départ des *représentations simplement « sémiotiques »* :
  - désigner, associer, reproduire des modèles empiriques (comme pour les premiers « comptages »).
- Par la suite, les opérations numériques sont une *régulation* des représentations numériques :
  - inférences logiques, réversibilité, etc.

# Quelques données et analyses

- Rôle du subitizing (i.e. évaluation perceptive immédiate d'une quantité à l'unité près) dans l'acquisition des premiers mots-nombres (Benoit, Lehalle & Jouen, 2004) ;
  - le subitizing permet de considérer simultanément chaque élément et le tout (cardinalité).
- Importance des représentations analogiques (i.e. représenter par exemple des quantités par des collections de points) :
  - à 4 ans, les signes écrits (1, 2, 3, ...) peuvent être reliés aux représentations analogiques avant d'être reliés aux mots-nombres correspondants (Benoit, Lehalle, Molina, Tijus & Jouen, 2013).
- Vers 4 ans et demi, l'unité de comptage peut devenir abstraite : compter des regroupements d'objets et non plus simplement des objets physiques (Shipley & Shepperson, 1990 ; Sophian & Kailihiwa, 1998).
  - Si on présente 3 dinosaures, 5 vaches et 3 chevaux et que l'on demande à l'enfant combien il y a de « familles » (après un accord préalable sur le sens de ce terme), les très jeunes enfants s'embarquent dans un comptage des animaux un à un... mais il y en a « trop beaucoup ! ». À partir de 4 ans et demi (tous à 5 ans), ils disent immédiatement qu'il y a trois familles...
- L'arithmétisation des nombres est progressive et suit la suite des nombres (Gréco, 1960, 1963 ; Sarnecka & Carey, 2008).

# Apprendre/Abstraire/Relier

Valoriser les exercices, entraînements, activités qui visent à :

- **Apprendre** : apprendre c'est étendre ses connaissances à un même niveau de développement (donc à un même niveau cognitif de fonctionnement)
  - Au niveau sémiotique, il y a un apprentissage nécessaire (mais progressif) des codes numériques ; en effet, pour relier opératoirement des signes, encore faut-il disposer de signes...
- **Abstraire** : c'est-à-dire aller à l'essentiel et repérer des analogies, ainsi :  
La notion de nombre impose :
  - de s'abstraire des critères de quantification spatialisés,
  - de compter des unités abstraites, pas seulement des objets,
  - de reconnaître l'équivalence de procédures (par exemple compter dans un sens ou compter dans un autre...), etc.
- **Relier** : relier des codes, des procédures, etc. ; relier par exemple :
  - le comptage au subitizing (Vilette, Delrieu & Lehalle, 2008),
  - les mots-nombres aux signes écrits,
  - les signes arbitraires aux signes analogiques (comme les doigts de la main...),
  - l'ordinalité et la cardinalité,
  - les nombreuses manières d'obtenir une même somme (logique ensembliste, Fuson 1991).

# En résumé :

- La compréhension de la notion de nombre est une *construction* dont on commence à bien connaître les étapes.
- Tout progrès cognitif est d'ordre *sémantique* (Gréco, 1991 ; Lehalle et al. 2014) ; il se construit d'abord dans des situations spécifiques et significatives pour l'enfant *avant* de constituer des compétences générales abstraites.

# Références

- Benoit, L., Lehalle, H., & Jouen, F. (2004). Do young children acquire number words through subitizing or counting? *Cognitive Development, 19*, 291-307.
- Benoit, L., Lehalle, H., Molina, M., Tijus, C. & Jouen, F. (2013). Young children's mapping between arrays, number words, and digits. *Cognition, 129*, 95-101
- Bideaud, J., Lehalle, H., & Vilette, B. (2004). *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant*. Lille : Presses Universitaires du Septentrion.
- Fuson, K.C. (1991). Relation entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. In J. Bideaud, C. Meljac & J-P Fischer (Eds.), *Les chemins du nombre* (pp. 159-182). Lille: Presses Universitaires du Septentrion.
- Gréco, P. (1960). Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant. In P. Gréco, J.-B. Grize, S. Papert & J. Piaget (Eds.), *Problèmes de la construction du nombre* (pp. 149-213). Paris : Presses Universitaires de France.
- Gréco, P. (1963). Le progrès des inférences itératives et des notions arithmétiques chez l'enfant et l'adolescent. In P. Gréco, B. Inhelder, B. Matalon & J. Piaget (Eds.), *La formation des raisonnements récurrentiels* (pp. 143-316). Paris : Presses Universitaires de France.
- Gréco, P. (1991). *Structures et significations. Approches du développement cognitif*. Paris : Éditions de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales.
- Lehalle, H. (2002). Connaissances numériques et modèles de développement. In J. Bideaud & H. Lehalle (Eds.), *Le développement des activités numériques chez l'enfant* (pp. 29-54). Paris : Hermès.
- Lehalle, H (Ed.) (2014). Passé, présent, futur : Quel modèle de développement ? *Enfance*, n°3 (numéro thématique, juillet – septembre).
- Lehalle, H., Delrieu, E., Joay-Arrouquet, J., & Vilette, B. (2014). Construction structurale et abstraction structurale : deux cheminements développementaux imbriqués, *Enfance*, n°3 (numéro thématique, juillet – septembre), 335-364.
- Sarnecka, B.W., & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it, *Cognition, 108*, 662-674.
- Shiple E.F. & Shepperson, B. (1990). Countable entities: Developmental changes. *Cognition, 34*, 109-136.
- Sophian, C. & Kailihiwa, C. (1998). Units of counting: Developmental changes. *Cognitive Development, 13*, 561-585.
- Vilette, B., Delrieu, E., & Lehalle, H. (2008). La construction de la propriété numérique entre 2 et 4 ans. *Archives de Psychologie, 73* (Nos 286-287), 187-208.

# Henri Lehalle

Professeur émérite de psychologie du développement de l'enfant et de l'adolescent

Université Paul Valéry – Montpellier & Laboratoire CHArt – EPHE et Paris 8